

SPHERICAL CIRCLE-COVERINGS AND GEODESIC DOMES

RECOUVREMENTS DE LA SPHÈRE PAR DES CERCLES ET DES DÔMES GÉODÉSIQUES

Tibor Tarnai

Hungarian Institute for Building Science
Budapest
Dávid F. u. 6.
H-1113, Hungary

Magnus J. Wenninger

Saint John's Abbey
Collegeville, MN 56321
USA

This paper is based on a lecture of the first author, presented at the IASS International Congress, Moscow, 1985.

Cet article est basé sur une conférence du premier auteur présentée au congrès international IASS, à Moscou, en 1985.

French translation:
Traduction française :
Jean-Luc Raymond

ABSTRACT

This paper investigates how to construct “straight” and “skew” polyhedra inscribed into a sphere, bounded by pentagons and hexagons, with minimum numbers of face types and edge-lengths. It also examines how to construct geodesic domes by means of covering the sphere with equal and non-equal circles, respectively. The results are illustrated by polyhedron models of the spherical circle-coverings.

INTRODUCTION

There is an interesting possibility for the construction of a dome: to compose the dome structure of circles or spherical caps as structural elements.

In his modular dome structures, Spunt used a packing of equal circles on a part of the sphere [7], then, in a recent version of his structures, he packed the circles in two layers. These two layers of equal spherical cap panels with the equal connecting elements resulted in a covering system on a part of the sphere (**Figure 1**, taken over from [8]).

RÉSUMÉ

Cet article constitue une recherche des méthodes de construction de polyèdres « droits » et « gauches » inscrits dans une sphère, bornés par des pentagones et des hexagones, avec un nombre minimal de types de faces et de longueurs d’arêtes. On y examine aussi la construction de dômes géodésiques par voie de recouvrement de la sphère à l’aide de cercles égaux et inégaux, respectivement. Des modèles polyédriques des recouvrements de la sphère par des cercles illustrent les résultats.

INTRODUCTION

Il y a une possibilité intéressante en ce qui concerne la construction d’un dôme : la composition de la structure en dôme en utilisant comme éléments structuraux des cercles ou des calottes sphériques.

Dans ses structures modulaires en dôme, Spunt a utilisé une juxtaposition de cercles égaux sur une partie de la sphère [7]; ensuite, dans une version récente de ses structures, il a juxtaposé les cercles en deux couches. Ces deux couches de panneaux de

Pavlov developed a method of subdivision of the spherical surface, which he denoted by "II" [6]. This method results in inscribed polyhedra of the sphere, bounded by plane pentagons and hexagons. The circumscribed circles of the faces of the polyhedron yield a thin (economical) covering of the sphere. In this way a scale dome can be constructed in which, however, the diameters of the circles are different (**Figure 2**, taken over from [6]).

Studying Spunt's and Pavlov's covering systems we can make two statements. First, Pavlov's subdivision has icosahedral rotational symmetry and also a plane of symmetry. In a proper "straight" triangular network topology this subdivision method produces a minimum number of hexagonal face types and edge-lengths. Second, in Spunt's covering system the circles are equal but the covering is not thin enough, on the other hand, in Pavlov's covering system the covering is thin but the circles are not equal.

calottes sphériques égales accompagnés d'éléments de raccord égaux résultent en un système de recouvrement d'une partie de la sphère (**figure 1**, extraite de [8]).

Pavlov a développé une méthode de subdivision de la surface sphérique, qu'il nota « II » [6]. Cette méthode résulte en des polyèdres inscrits dans la sphère, bornés par des pentagones et des hexagones plans. Les cercles circonscrits des faces du polyèdre produisent un recouvrement fin (économique) de la sphère. De cette façon, on peut construire un dôme à l'échelle pour lequel, toutefois, les diamètres des cercles diffèrent (**figure 2**, extraite de [6]).

En analysant les systèmes de recouvrement de Spunt et de Pavlov, on peut formuler deux énoncés. Premièrement, la subdivision de Pavlov possède une symétrie de rotation icosaédrique ainsi qu'un plan de symétrie. Dans une topologie appropriée de réseau triangulaire « droit », cette méthode de subdivision produit un nombre minimal de types de faces hexagonales et de longueurs d'arêtes. Deuxièmement, dans le système de recouvrement de Spunt, les cercles sont égaux mais le recouvrement n'est pas assez fin.

FIGURE 1

L. Spunt's modular dome structure. A halfdome under construction.

Structure modulaire en dôme de L. Spunt. Un demi-dôme en construction.



With respect to these two statements two questions arise:

1. Do there exist trivalent polyhedra inscribed into the sphere, in “skew” topology (having icosahedral rotational symmetry but not having a plane of symmetry), bounded by plane pentagons and hexagons with properties just as advantageous as or perhaps more advantageous than those obtained by Pavlov’s subdivision?
2. Can the sphere be covered with equal circles in “straight” topology (having icosahedral rotational symmetry and having a plane of symmetry) used by Pavlov and in “skew” topology, respectively, so that the radius of the circles is a minimum? On the other hand, do there exist trivalent polyhedra inscribed into the sphere, in the above-mentioned “straight” and “skew” topologies, bounded by plane pentagons and hexagons such that the circumradii of the face polygons are the same?

“Straight” is referred to as Class I or Class II, and “skew” is referred to as Class III in [12].

D’autre part, le système de recouvrement de Pavlov présente un recouvrement fin, mais les cercles ne sont pas égaux.

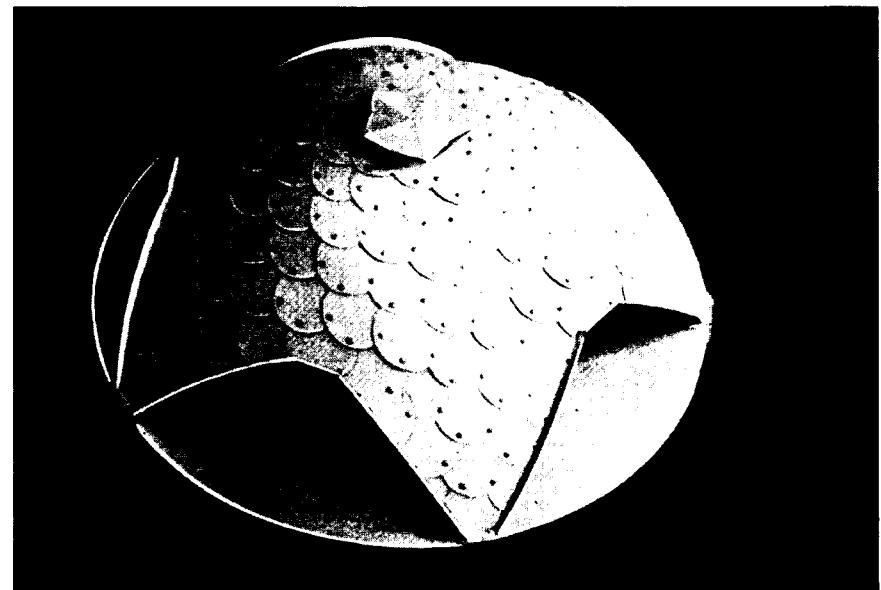
Ces deux énoncés entraînent deux questions :

1. Existe-t-il des polyèdres trivalents inscrits dans la sphère, en topologie « gauche » (possédant une symétrie de rotation icosaédrique mais n’ayant pas de plan de symétrie), bornés par des pentagones et des hexagones plans et ayant des propriétés aussi ou même plus avantageuses que celles obtenues à l’aide de la subdivision de Pavlov?
2. Peut-on réaliser un recouvrement de la sphère par des cercles égaux en topologie « droite » (possédant une symétrie de rotation icosaédrique ainsi qu’un plan de symétrie) utilisée par Pavlov et en topologie « gauche » respectivement, de telle sorte que le rayon des cercles soit minimal? D’autre part, existe-t-il, dans les topologies « droite » et « gauche » déjà mentionnées, des polyèdres trivalents inscrits dans la sphère, bornés par des pentagones et des hexagones plans, et de telle sorte que les rayons de circonscription des faces polygonales soient les mêmes?

FIGURE 2

G.N. Pavlov’s scale dome structure. A model.

Structure en dôme à l’échelle de G.N. Pavlov. Un modèle.



The first question was partly answered by Pavlov himself, due to whom, in certain cases there exists a “skew” polyhedron whose number of face types is the same as that of a “straight” polyhedron but the number of all faces of the “skew” polyhedron is greater than that of the “straight” one.

The second question is, however, unanswered to our knowledge. This problem will mainly be investigated in the present paper.

SKEW ICOSAHEDRAL TRIANGLE TESSELLATIONS AND THEIR DUALS

Consider the regular tessellation of symbol $\{3,5+\}_{b,c}$, introduced by Coxeter [2] (see also [12]). This tessellation, which was discovered by Caspar and Klug [1], consists of equilateral triangles, five or more than five (i.e. six) at each vertex, some slightly folded, such that they cover and fill the polyhedral surface of the regular icosahedron $\{3,5\}$; the suffices b, c indicate that a vertex of the icosahedron can be arrived at from an adjacent one along the edges of the tessellation by b steps on the vertices in one direction, then c steps after a change in direction by 60° . A part of this tessellation is shown by the continuous lines in **Figure 3a** where the large equilateral triangle composed of dashed lines is a face of the icosahedron.

By a rotation of each edge of the tessellation by 90° about its midpoint a regular tessellation of symbol $\{5+,3\}_{b,c}$ is obtained which is the dual one of the tessellation $\{3,5+\}_{b,c}$. This tessellation, which was discovered by Goldberg [5], consists of regular polygons having five or more than five (i.e. six) sides, three at each vertex. The meaning of the suffices b, c can be explained in a way similar to that used for the triangular tessellation but instead of vertices centres of polygons should be considered (**Figure 3b**).

Le terme «droit» fait référence à la classe I ou la classe II, et «gauche» fait référence à la classe III dans [12].

Pavlov lui-même répondait partiellement à la première question; selon lui, dans certains cas, il existe un polyèdre «gauche» dont le nombre de types de faces est égal à celui d'un polyèdre «droit» mais le nombre total de faces du polyèdre «gauche» est supérieur à celui du polyèdre «droit».

Toutefois, la seconde question demeure, à notre connaissance, sans réponse. Le présent article s'attaquera principalement à ce problème.

TESSELLATIONS TRIANGULAIRES ICOSAÉDRIQUES GAUCHES ET LEURS DUALS

Considérons la tessellation régulière de symbole $\{3,5+\}_{b,c}$ introduite par Coxeter [2] (voir aussi [12]). Cette tessellation, découverte par Caspar et Klug [1], est constituée de triangles équilatéraux, cinq ou plus de cinq (c.-à-d. six) à chaque sommet, certains légèrement pliés, de telle sorte qu'ils recouvrent et remplissent la surface polyédrique de l'icosaèdre régulier $\{3,5\}$; les suffixes b et c indiquent qu'un sommet de l'icosaèdre peut être atteint à partir d'un sommet adjacent, le long des arêtes de la tessellation en b étapes sur les sommets dans une direction, suivis de c pas après un changement de direction de 60° . La **figure 3a** illustre à l'aide de traits continus une partie de cette tessellation ; le grand triangle équilatéral formé par les traits pointillés est une face de l'icosaèdre.

Une rotation de 90° de chaque arête de la tessellation autour de son point milieu permet d'obtenir une tessellation régulière de symbole $\{5+,3\}_{b,c}$ qui est le dual de la tessellation $\{3,5+\}_{b,c}$. Cette tessellation, découverte par Goldberg [5], est constituée de polygones réguliers possédant cinq ou plus de cinq (c.-à-d. six) côtés, trois à chaque sommet. La signification des suffixes b et c peut s'expliquer d'une façon similaire à celle utilisée pour la tessellation triangulaire, mais au lieu des sommets, on devra considérer les centres des polygones (**figure 3b**).

The pair of integers b, c generating the tessellation determine the triangulation number T :

$$T = b^2 + bc + c^2$$

By "blowing up" the triangle tessellation and its dual we obtain a spherical triangle polyhedron and a spherical trivalent polyhedron, respectively. The numbers of edges, faces and vertices of the triangle polyhedron can be expressed by T as follows:

$$E = 30T, \quad F = 20T, \quad V = 10T + 2,$$

and also the numbers of edges, faces and vertices of the dual trivalent polyhedron:

$$e = 30T, \quad f = 10T + 2, \quad v = 20T$$

where the number of pentagons is 12 and the number of hexagons is $10(T - 1)$.

This type of triangular tessellation and its dual gives the topological base for our investigations.

La paire d'entiers b et c , engendrant la tessellation, détermine T , le nombre de la triangulation :

$$T = b^2 + bc + c^2$$

En réalisant un agrandissement de la tessellation triangulaire et de son dual, on obtient, respectivement, un polyèdre triangle sphérique et un polyèdre sphérique trivalent. On peut exprimer à l'aide de T le nombre d'arêtes, de faces et de sommets du polyèdre triangle :

$$E = 30T, \quad F = 20T, \quad V = 10T + 2,$$

ainsi que le nombre d'arêtes, de faces et de sommets du polyèdre trivalent dual :

$$e = 30T, \quad f = 10T + 2, \quad v = 20T$$

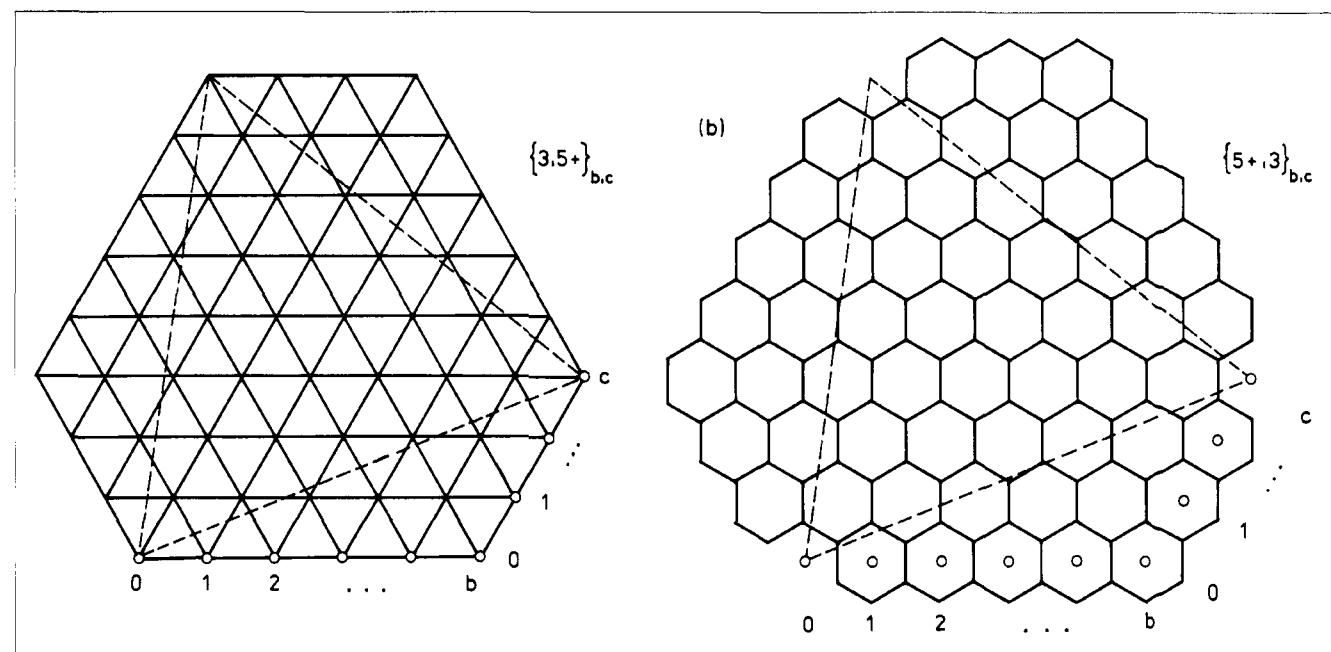
où le nombre de pentagones est égal à 12 et le nombre d'hexagones est de $10(T - 1)$.

Ce type de tessellation triangulaire et son dual fournissent la base topologique de nos recherches.

FIGURE 3

The meaning of the Coxeter symbols.
3a. The triangular tessellation $\{3,5+\}_{b,c}$ of Caspar and Klug,
3b. its dual: the trivalent tessellation $\{5+,3\}_{b,c}$ of Goldberg.

La signification des symboles de Coxeter.
3a. La tessellation triangulaire $\{3,5+\}_{b,c}$ de Caspar et Klug,
3b. son dual : la tessellation trivale $\{5+,3\}_{b,c}$ de Goldberg.



THIN COVERING OF THE SPHERE WITH CIRCLES

The problem of thinnest covering of a sphere with circles (or spherical caps) is one of the well-known problems of discrete geometry [3]. The classical problem concerns equal circles: How must the covering of a sphere be formed by n equal circles so that the angular radius of the circles will be as small as possible? The solution of this problem is known only for some values of n ($n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14$) and for some values of n there are only conjectures ($n = 8, 9, 16, 20, 32$); but recently new coverings have been constructed for $n = 11$ [11], $n = 13$ [9] and $n = 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 26, 38, 42, 50$ [10].

To a covering system of the circles a **graph** is associated. The graph is a bipartite graph. It contains two kinds of vertices. The vertices of the first kind are the centres of the spherical circles and the vertices of the second kind are the points of the perimeters of the circles in which the spherical point is only just covered. (In the figures, the vertices of the first kind will be marked by small circles but the vertices of the second kind will not have any special mark.) The edges of the graph are the shorter great circle arcs joining the centres and the perimetric points of the circles just covered. In the case of equal circles all the edges of the graph are of equal length.

The **density** of covering is defined as the ratio of the total area of the surface of the spherical caps to the surface area of the sphere. In the case of equal circles the density can be expressed simply:

$$D = \frac{n}{2} (1 - \cos r)$$

where r denotes the angular (spherical) radius of the circles. A lower bound for the minimum density of covering of the sphere with n equal circles can be given by Fejes Tóth's formula [3]:

$$D_\ell = \frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cot \frac{n-2}{n-6} \pi \right)$$

RECOUVREMENT FIN DE LA SPHÈRE À L'AIDE DE CERCLES

Le problème du recouvrement le plus fin possible de la sphère par des cercles (ou des calottes sphériques) est l'un des problèmes bien connus de la géométrie discrète [3]. Le problème classique s'intéresse aux cercles égaux : Comment peut-on réaliser le recouvrement d'une sphère par n cercles égaux de telle sorte que le rayon angulaire des cercles soit aussi petit que possible? On ne connaît la solution de ce problème que pour certaines valeurs de n ($n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14$) ; pour quelques autres valeurs de n , il n'existe que des conjectures ($n = 8, 9, 16, 20, 32$). Mais récemment, de nouveaux recouvrements ont été construits pour $n = 11$ [11], $n = 13$ [9] et $n = 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 26, 38, 42, 50$ [10].

À un système de recouvrement de cercles, on associe un **graphe**. Le graphe est biparti. Il contient deux types de sommets. Les sommets du premier type sont les centres des cercles sphériques et les sommets du second type sont les points des circonférences des cercles dans lesquels le point sphérique est tout juste recouvert. (Dans les figures, les sommets du premier type seront identifiés par de petits cercles, mais les sommets du second type n'auront aucune marque spéciale.) Les arêtes du graphe sont les plus petits arcs de grand cercle joignant les centres et les points périphériques tout juste recouverts des cercles. Dans le cas de cercles égaux, toutes les arêtes du graphe sont d'égales longueur.

La **densité** de recouvrement est définie comme le rapport de l'aire totale de la surface des calottes sphériques à l'aire de la surface de la sphère. Dans le cas de cercles égaux, la densité s'exprime simplement de la façon suivante :

$$D = \frac{n}{2} (1 - \cos r)$$

où r désigne le rayon angulaire (sphérique) des cercles. À la densité minimale de recouvrement de la sphère par n cercles égaux, on peut donner une limite inférieure par la formule de Fejes Tóth [3] :

FIGURE 4

The first term of Pavlov's sequence of subdivision in $\{3,5+\}_{b,b}$ ($b=1$).

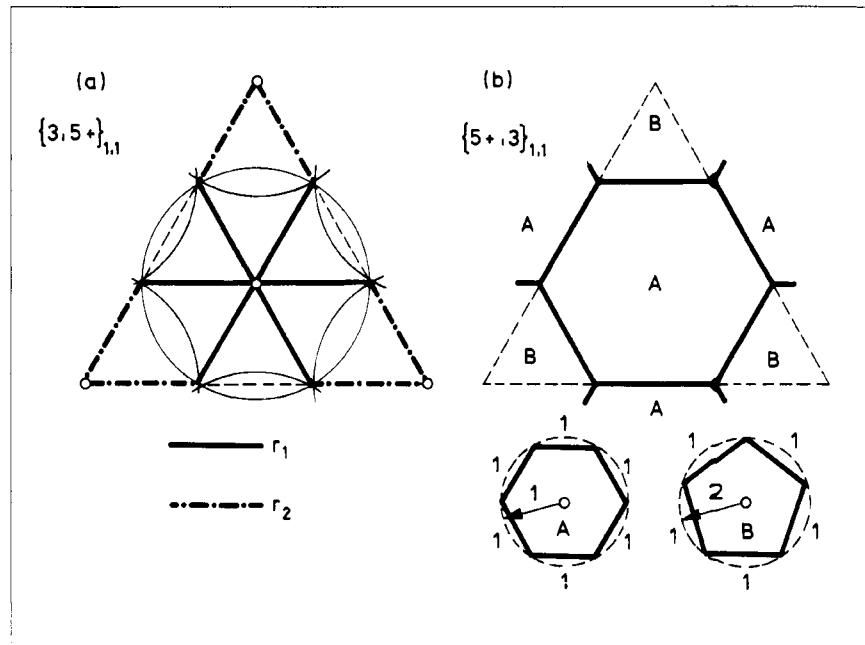
4a. The graph of covering the sphere with two kinds of circles,

4b. the corresponding polyhedron with $a_1 = 0.4035482$, $a_2 = 0.3432786$.

Le premier terme de la suite de subdivision dans $\{3,5+\}_{b,b}$ de Pavlov ($b=1$).

4a. Le graphe du recouvrement de la sphère par deux types de cercles,

4b. le polyèdre correspondant avec $a_1 = 0.4035482$, $a_2 = 0.3432786$.

**FIGURE 5**

Covering the sphere with 32 equal circles in $\{3,5+\}_{1,1}$.

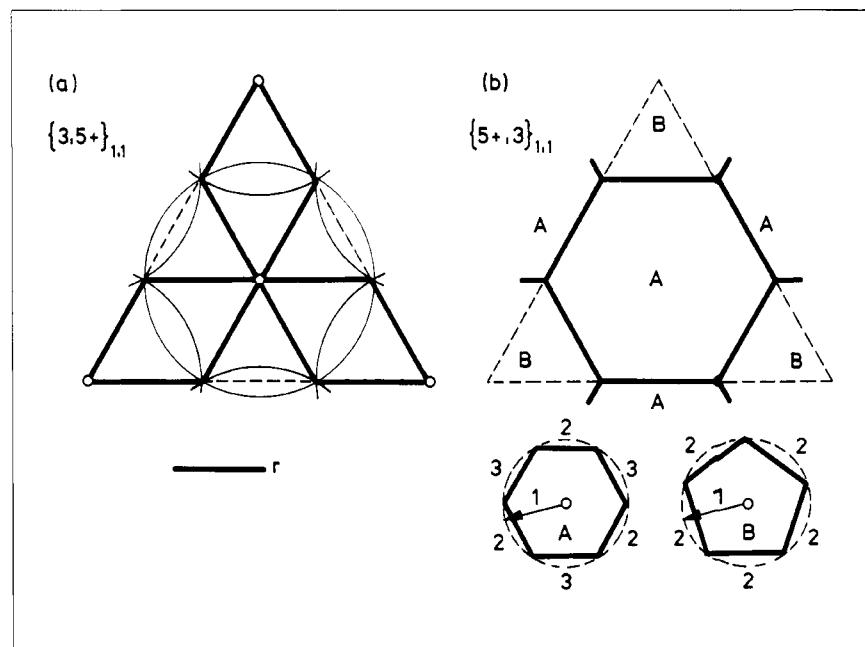
5a. The graph of the covering,

5b. the corresponding polyhedron with $a_1 = 0.3857527$, $a_2 = 0.4534795$, $a_3 = 0.3137996$.

Recouvrement de la sphère par 32 cercles égaux dans $\{3,5+\}_{1,1}$.

5a. Le graphe du recouvrement,

5b. le polyèdre correspondant avec $a_1 = 0.3857527$, $a_2 = 0.4534795$, $a_3 = 0.3137996$.



We investigated circle-coverings of the sphere in the $\{3,5+\}_{b,c}$ system for the b,c pairs 1,1; 2,1; 2,2; 3,1 for which $T = 3, 7, 12, 13$ and so $n = V = 32, 72, 122, 132$. We looked for coverings with circles of different radii by which minimum numbers of face types and edge lengths of the corresponding polyhedra can be obtained, and coverings with equal circles. The results are compiled in **Tables 1 and 2** and illustrated in **Figures 4-11**. In the figures, the large equilateral triangle composed of dashed lines is always a face of the icosahedron. In the (b) parts of **Figures 4-11** the sides and circumradii a_i of the polygons are briefly denoted by their subscripts i ($i = 1, 2, \dots$).

$$D_\ell = \frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cot \frac{n}{n-2} \frac{\pi}{6} \right)$$

On a étudié les recouvrements par cercles de la sphère dans le système $\{3,5+\}_{b,c}$ pour les paires b,c 1,1; 2,1; 2,2; 3,1 pour lesquels $T = 3, 7, 12, 13$, et donc $n = S = 32, 72, 122, 132$. On a recherché les recouvrements de cercles de différents rayons qui permettrait d'obtenir les nombres minimaux de types de faces et de longueurs d'arêtes, ainsi que les recouvrements constitués de cercles égaux. Les résultats sont compilés dans les **tableaux 1 et 2** et illustrés aux **figures 4 à 11**. Dans les figures, le grand triangle équilatéral formé par les traits pointillés est toujours une face de l'icosaèdre. Dans les parties (b) des **figures 4 à 11**, les côtés et les rayons de circonscription a_i des polygones sont désignés brièvement par leurs indices i ($i = 1, 2, \dots$).

TABLE 1

Data of covering the sphere with different kinds of circles.

TABLEAU 1

Données de recouvrements de la sphère par différents types de cercles.

n	Tessellation	Graph Graphe	Number of circles Nombre de cercles	Radius Rayons	Density Densité
32	$\{3,5+\}_{1,1}$	Figure 4a	20	$r_1 = 23^\circ 48' 00.6''$	1.2150142
			12	$r_2 = 20^\circ 04' 36.3''$	
72	$\{3,5+\}_{2,1}$	Figure 6a	60	$r_1 = 15^\circ 32' 01.9''$	1.2110252
			12	$r_2 = 11^\circ 14' 43.6''$	
122	$\{3,5+\}_{2,2}$	Figure 8a	50	$r_1 = 12^\circ 01' 32.0''$	1.2100964
			60	$r_2 = 11^\circ 27' 53.2''$	
			12	$r_3 = 8^\circ 18' 07.6''$	
132	$\{3,5+\}_{3,1}$	Figure 10a	60	$r_1 = 11^\circ 32' 36.8''$	1.2110629
			60	$r_2 = 11^\circ 02' 26.1''$	
			12	$r_3 = 7^\circ 19' 39.6''$	

TABLE 2

Data of covering the sphere with n equal circles.

TABLEAU 2

Données de recouvrements de la sphère par n cercles égaux.

n	Tessellation	Graph Graphe	Radius r Rayon r	Density D Densité D	Lower bound D_ℓ Barre inférieure D_ℓ
32	$\{3,5+\}_{1,1}$	Figure 5a	$22^\circ 41' 25.7''$	1.2383648	1.2167427
72	$\{3,5+\}_{2,1}$	Figure 7a	$15^\circ 08' 40.3''$	1.2502848	1.2124227
122	$\{3,5+\}_{2,2}$	Figure 9a	$11^\circ 41' 08.3''$	1.2643095	1.2110776
132	$\{3,5+\}_{3,1}$	Figure 11a	$11^\circ 14' 43.1''$	1.2671164	1.2109331

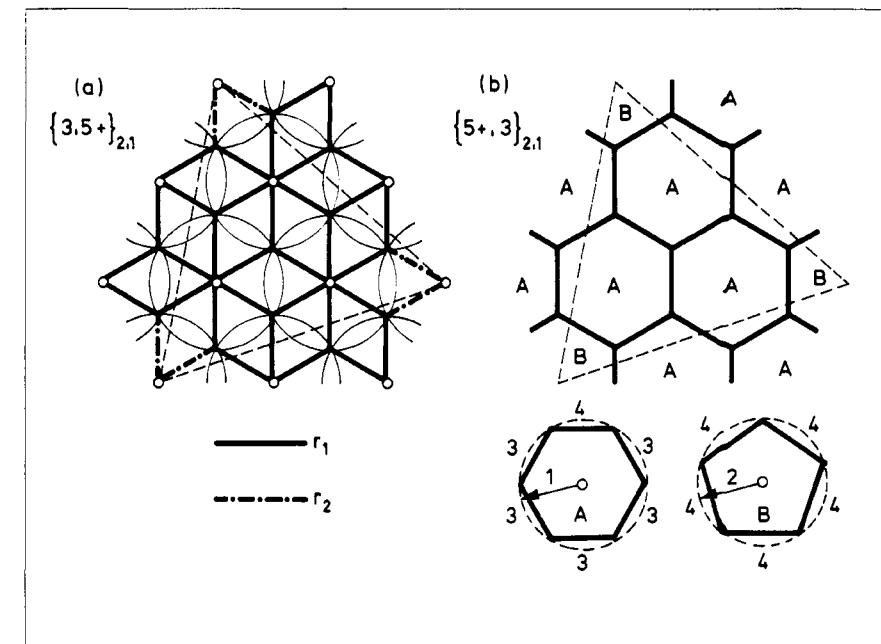
FIGURE 6

Spherical tessellation consisting of replicas of a pentagon and one type of hexagons, derived from $\{3,5+\}_{2,1}$.

- 6a.** The graph of covering the sphere with two kinds of circles,
6b. the corresponding polyhedron with
 $a_1 = 0.2678079$,
 $a_2 = 0.1950124$,
 $a_3 = 0.2753149$,
 $a_4 = 0.2292508$.

Tessellation sphérique constituée de répliques d'un pentagone et d'un type d'hexagones, dérivée de $\{3,5+\}_{2,1}$.

- 6a.** Le graphe du recouvrement de la sphère par deux sortes de cercles,
6b. le polyèdre correspondant avec
 $a_1 = 0.2678079$,
 $a_2 = 0.1950124$,
 $a_3 = 0.2753149$,
 $a_4 = 0.2292508$.

**FIGURE 7**

Covering the sphere with 72 equal circles in $\{3,5+\}_{2,1}$.

- 7a.** The graph of the covering,
7b. the corresponding polyhedron with
 $a_1 = 0.2612548$,
 $a_2 = 0.2682099$,
 $a_3 = 0.1836079$,
 $a_4 = 0.3433837$,
 $a_5 = 0.3071234$.

Recouvrement de la sphère par 72 cercles égaux dans $\{3,5+\}_{2,1}$.

- 7a.** Le graphe du recouvrement,
7b. le polyèdre correspondant avec
 $a_1 = 0.2612548$,
 $a_2 = 0.2682099$,
 $a_3 = 0.1836079$,
 $a_4 = 0.3433837$,
 $a_5 = 0.3071234$.

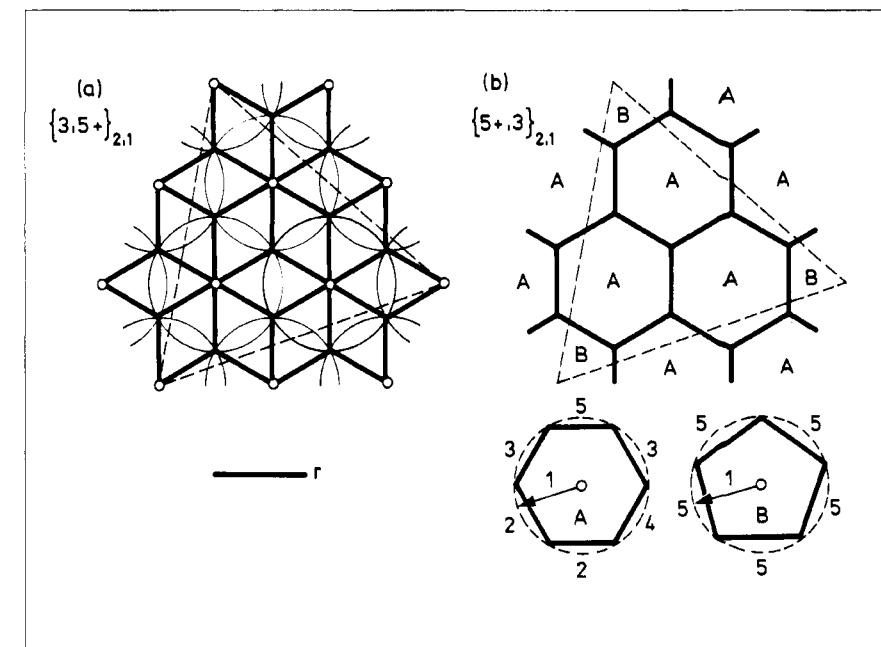


FIGURE 8

The second term of Pavlov's sequence of subdivision in $\{3,5+\}_{b,b}$ ($b=2$).

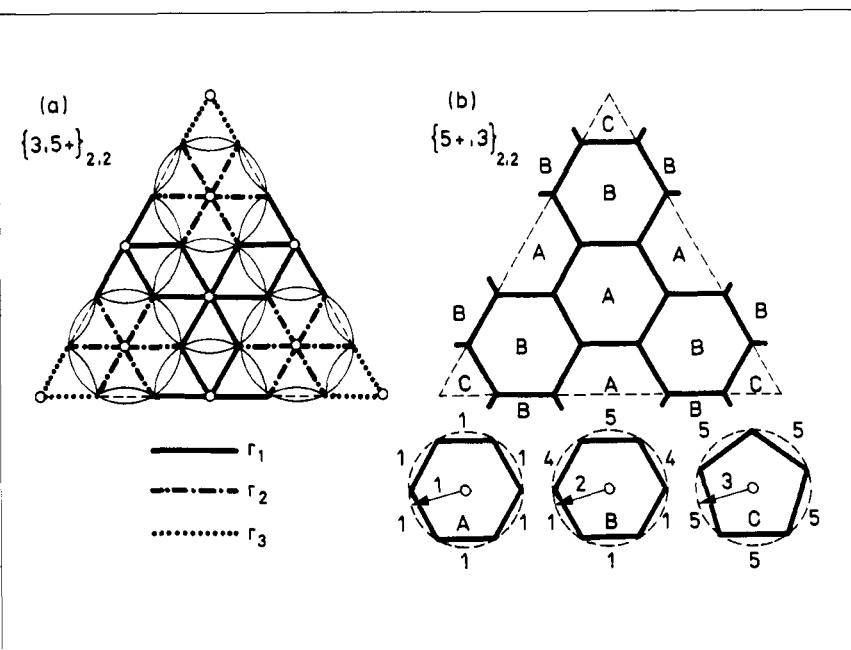
8a. The graph of covering the sphere with three kinds of circles,

8b. the corresponding polyhedron with
 $a_1 = 0.2083479$,
 $a_2 = 0.1987657$,
 $a_3 = 0.1443928$,
 $a_4 = 0.1984624$,
 $a_5 = 0.1697440$.

Le second terme de la suite de subdivision dans $\{3,5+\}_{b,b}$ de Pavlov ($b=2$).

8a. Le graphe du recouvrement de la sphère par trois types de cercles,

8b. le polyèdre correspondant avec
 $a_1 = 0.2083479$,
 $a_2 = 0.1987657$,
 $a_3 = 0.1443928$,
 $a_4 = 0.1984624$,
 $a_5 = 0.1697440$.

**FIGURE 9**

Covering the sphere with 122 equal circles in $\{3,5+\}_{2,2}$.

9a. The graph of the covering,

9b. the corresponding polyhedron — with modification at the vertices of the icosa-hedron — with
 $a_1 = 0.2025418$,
 $a_2 = 0.1557419$,
 $a_3 = 0.2213397$,
 $a_4 = 0.1831432$,
 $a_5 = 0.2120194$,
 $a_6 = 0.1929425$,
 $a_7 = 0.1830856$.

Recouvrement de la sphère par 122 cercles égaux dans $\{3,5+\}_{2,2}$.

9a. Le graphe du recouvrement,

9b. le polyèdre correspondant — contenant des modifications aux sommets de l'icosa-hedron — avec
 $a_1 = 0.2025418$,
 $a_2 = 0.1557419$,
 $a_3 = 0.2213397$,
 $a_4 = 0.1831432$,
 $a_5 = 0.2120194$,
 $a_6 = 0.1929425$,
 $a_7 = 0.1830856$.

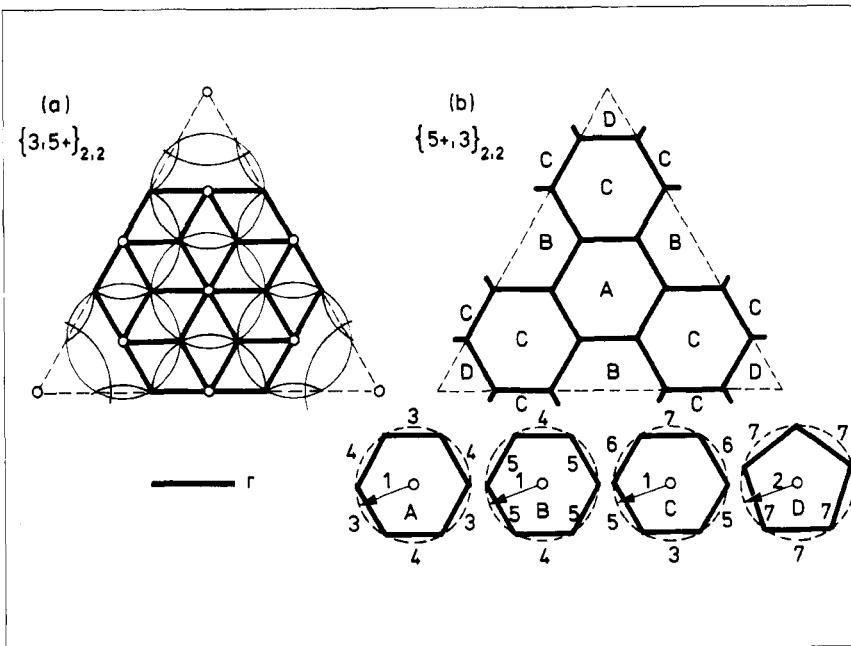


FIGURE 10

Spherical tessellation consisting of replicas of a pentagon and two types of hexagons, derived from $\{3,5+\}_{3,1}$.

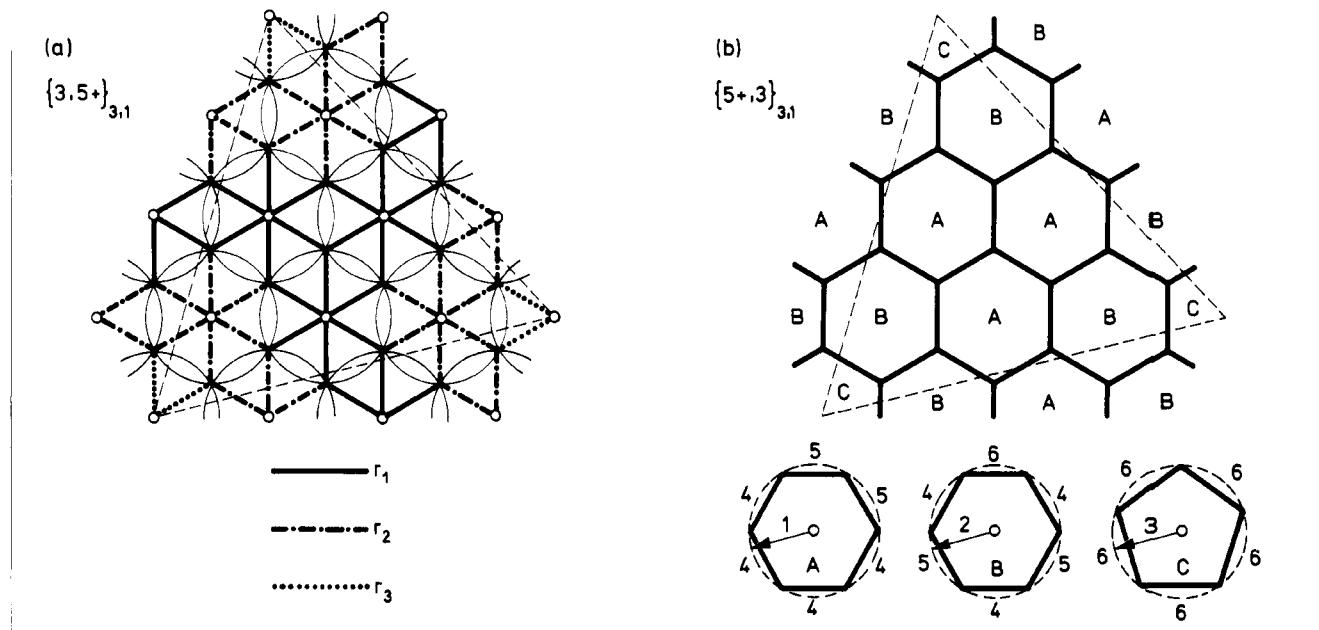
10a. The graph of covering the sphere with three kinds of circles,

10b. the corresponding polyhedron with
 $a_1 = 0.2001131$,
 $a_2 = 0.1915041$,
 $a_3 = 0.1275435$,
 $a_4 = 0.2031876$,
 $a_5 = 0.1939168$,
 $a_6 = 0.1499364$.

Tessellation sphérique constituée de répliques d'un pentagone et de deux types d'hexagones, dérivée de $\{3,5+\}_{3,1}$.

10a. Le graphe du recouvrement de la sphère par trois sortes de cercles,

10b. le polyèdre correspondant avec
 $a_1 = 0.2001131$,
 $a_2 = 0.1915041$,
 $a_3 = 0.1275435$,
 $a_4 = 0.2031876$,
 $a_5 = 0.1939168$,
 $a_6 = 0.1499364$.

**FIGURE 11**

Covering the sphere with 132 equal circles in $\{3,5+\}_{3,1}$.

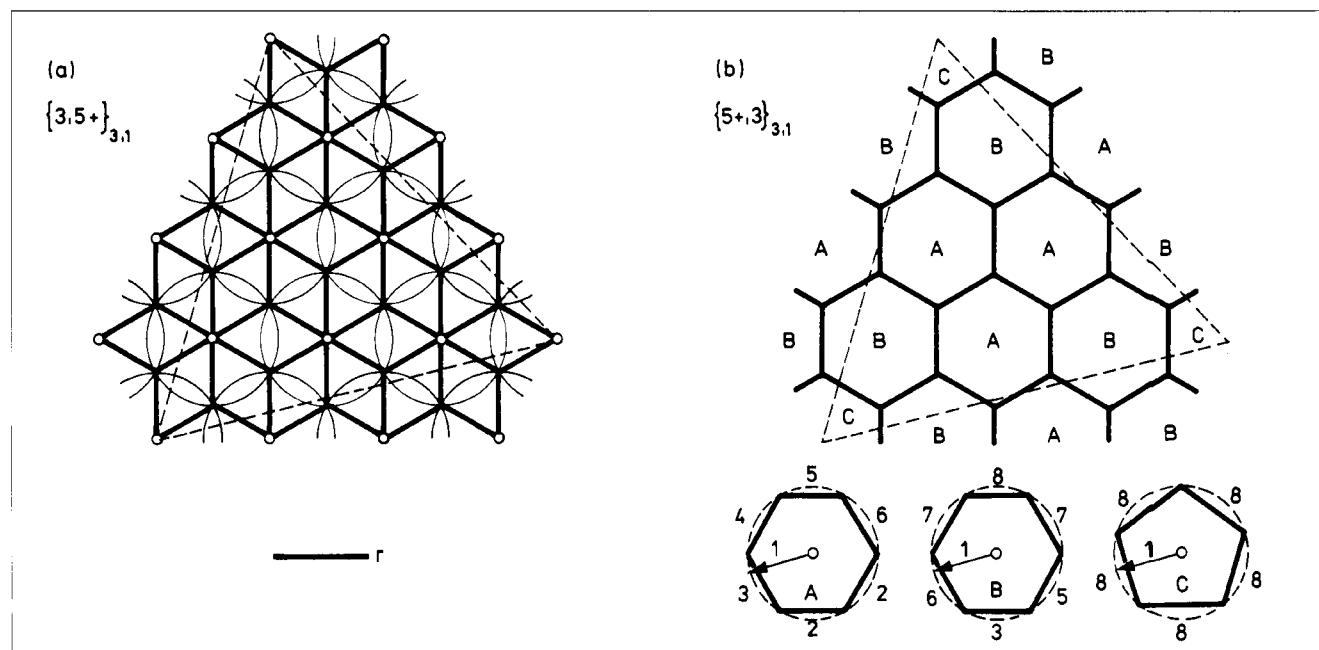
11a. The graph of the covering,

11b. the corresponding polyhedron with
 $a_1 = 0.1950099$,
 $a_2 = 0.1978519$,
 $a_3 = 0.2138250$,
 $a_4 = 0.0932338$,
 $a_5 = 0.2721083$,
 $a_6 = 0.1813918$,
 $a_7 = 0.1295396$,
 $a_8 = 0.2292479$.

Recouvrement de la sphère par 132 cercles égaux dans $\{3,5+\}_{3,1}$.

11a. Le graphe du recouvrement,

11b. le polyèdre correspondant avec
 $a_1 = 0.1950099$,
 $a_2 = 0.1978519$,
 $a_3 = 0.2138250$,
 $a_4 = 0.0932338$,
 $a_5 = 0.2721083$,
 $a_6 = 0.1813918$,
 $a_7 = 0.1295396$,
 $a_8 = 0.2292479$.



POLYHEDRON MODELS FOR SPHERICAL CIRCLE-COVERINGS

Consider a system of circles on the surface of a sphere. The Dirichlet cell of a fixed circle is defined so that the Dirichlet cell consists of those points whose power with respect to the fixed circle is less than the power with respect to any other circles. (The Dirichlet cell is the central projection of a face of the convex polyhedron determined by the planes of the circles onto the surface of the sphere [4].)

When the vertices of each Dirichlet cell of a system of circles covering the sphere are coplanar, the circle-system can be represented by a polyhedron determined by the vertices of the Dirichlet cells. The spherical circles (spherical caps) should be replaced by Euclidean circles (circular discs). This simple observation enables us to construct polyhedron models to illustrate spherical circle-coverings. In this way we can produce models, for instance, for regular coverings of the sphere with equal circles which can be seen in **Figures 12 and 13** where the coverings with 4, 6 and 12 circles are just the solutions of the problem of the thinnest

FIGURE 12

Covering the sphere with 4, 8, 6 equal circles in regular arrangement.
"II"



Recouvrement de la sphère par 4, 8, 6 cercles égaux en disposition régulière.

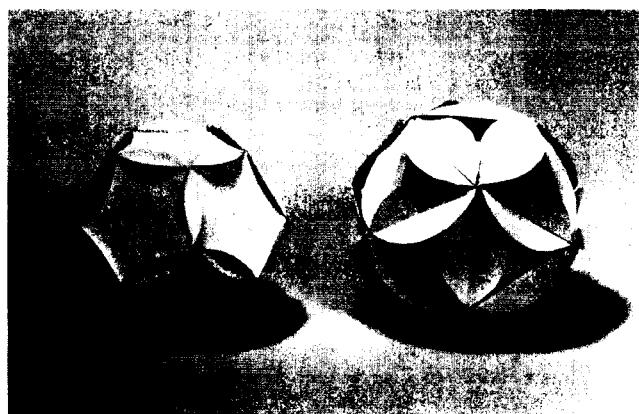
MODÈLES POLYÉDRIQUES POUR LES RECOUVREMENTS PAR CERCLES DE LA SPHERE

On considère un système de cercles sur la surface d'une sphère. La cellule de Dirichlet d'un cercle donné est définie de telle sorte qu'elle soit constituée des points dont la puissance par rapport au cercle donné est inférieure à leur puissance par rapport à tout autre cercle. (La cellule de Dirichlet est la projection centrale sur la surface de la sphère d'une face du polyèdre convexe déterminée par les plans des cercles [4].)

Lorsque les sommets de chaque cellule de Dirichlet d'un système de cercles recouvrant la sphère sont coplanares, le système de cercles peut être représenté par un polyèdre déterminé par les sommets des cellules de Dirichlet. Les cercles sphériques (calettes sphériques) doivent être remplacés par des cercles euclidiens (disques circulaires). Cette simple observation nous donne la possibilité de construire des modèles polyédriques pour illustrer les recouvrements de la sphère par des cercles. De cette façon, on peut réaliser des modèles, par exemple, pour des recouvrements réguliers de la sphère avec des cercles égaux, comme on

FIGURE 13

Covering the sphere with 12 and 20 equal circles in regular arrangement.
"II"



Recouvrement de la sphère par 12 et 20 cercles égaux en disposition régulière.

spherical circle-covering mentioned in the preceding section. And in this way we can produce models for all of the coverings we investigated in this paper. **Figures 12-19** are some examples of models made by the second author.

The models in **Figures 12 and 13** are derived from the five regular solids. These, along with the models in **Figures 14 and 15**, can be made by using circular discs upon which inscribed polygons are drawn: triangles, squares, pentagons or hexagons. Numerical data for **Figures 14 and 15** can be found with **Figures 4 and 5**. A cut is made half way along each chord. Two adjacent discs can then be joined by inserting the cut from one disc into the cut from another. Thus the entire polyhedron can be assembled without glue.

The models in **Figures 16, 18 and 19** can be made by using the appropriate polygons drawn from numerical data given with **Figures 7, 10 and 11**. One polygon of each type is used as a template to multiply parts. Each part is then trimmed, leaving tabs along edges for gluing one part to another. It is important to mark these tabs with identifying numerals: 1, 2, 3, etc., which are the

peut le voir aux **figures 12 et 13** où les recouvrements à l'aide de 4, 6 et 12 cercles sont justement les solutions au problème mentionné à la section précédente du recouvrement le plus fin possible de la sphère par des cercles . On peut aussi, de la même façon, réaliser des modèles pour tous les recouvrements étudiés dans cet article. Les **figures 12 à 19** présentent quelques exemples de modèles construits par le deuxième auteur.

Les modèles des **figures 12 et 13** proviennent des cinq solides réguliers. Ils peuvent, ainsi que les modèles des **figures 14 et 15**, être réalisés en utilisant des disques circulaires sur lesquels on aura tracé des polygones inscrits : triangles, carrés, pentagones ou hexagones. On peut trouver dans les **figures 4 et 5** les données numériques pour les **figures 14 et 15**. On effectue une incision de demi-longueur le long de chaque corde. On peut alors joindre deux disques adjacents en insérant l'incision d'un disque dans l'incision d'un autre. Le polyèdre peut ainsi être entièrement assemblé sans colle.

FIGURE 14

Covering the sphere with 32 non-equal circles according to **Figure 4**.

""



FIGURE 15

Covering the sphere with 32 equal circles according to **Figure 5**

""

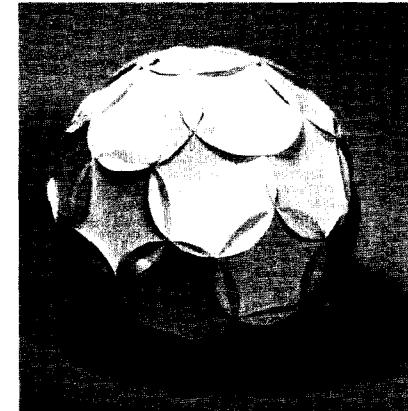
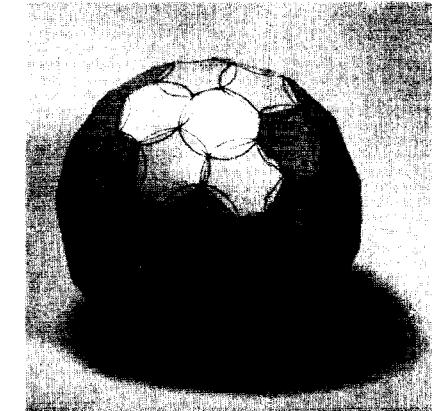


FIGURE 16

Covering the sphere with 72 equal circles according to **Figure 7**.

""



subscripts, i , of the a variable. Then the tab marked 3, for example, from one part can only be glued to a tab marked 3 from another part, and so on. Circular arcs of appropriate radius can be drawn on the parts before the gluing is done. These arcs then become parts of the intersecting circles on the surface of the polyhedron. These circles give the appearance of being the same as circular discs, although strictly speaking they are not the same. **Figure 18** has pentagrams and hexagrams in place of circles.

The model in **Figure 17** can be made by assembling 10 truncated triangular pyramids, open on the inside, for one pentagram part and 12 such pyramids for one hexagram part, using the numerical data given by Pavlov [6], taking into account the side bisections required here. These parts are held together by hexagonal bands which are truncated hexagonal pyramids open on both sides. The slanted sides of all these parts must be carefully identified by

Les modèles des **figures 16, 18 et 19** peuvent être réalisés en utilisant les polygones appropriés tracés à partir des données numériques issues des **figures 7, 10 et 11**. On utilise un polygone de chaque type en guise de patron afin de multiplier les parties. Chaque partie est alors taillée en laissant des languettes le long des arêtes pour pouvoir coller les parties les unes sur les autres. Il est important d'identifier ces languettes à l'aide de numéros : 1, 2, 3, etc., qui sont les indices i des variables a . Ainsi, la languette marquée du numéro 3, par exemple, sur une partie, ne pourra être collée que sur une languette marquée 3 d'une autre partie, et ainsi de suite. Avant d'effectuer le collage, on peut tracer sur les parties des arcs circulaires de rayon approprié. Ces arcs deviennent alors parties des cercles d'intersection sur la surface du polyèdre. Ces cercles semblent être identiques à des disques circulaires; toutefois, strictement parlant, ce n'en sont pas. La **figure 18** présente des pentagrammes et des hexagrammes au lieu de cercles.

FIGURE 17

A complete geodesic dome composed of pentagrams and hexagrams, derived by side bisection from Pavlov's subdivision for 122 circles according to Figure 8.
[11]

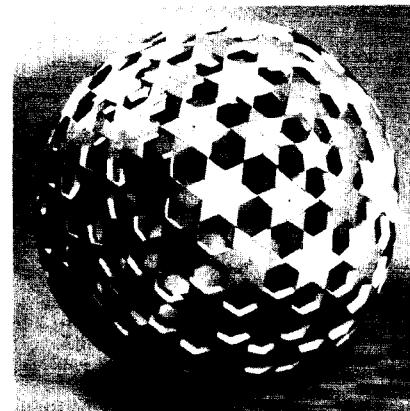


FIGURE 18

Polyhedron (with pentagrams and hexagrams) which corresponds to the covering of the sphere with 132 non-equal circles according to Figure 10.
[11]

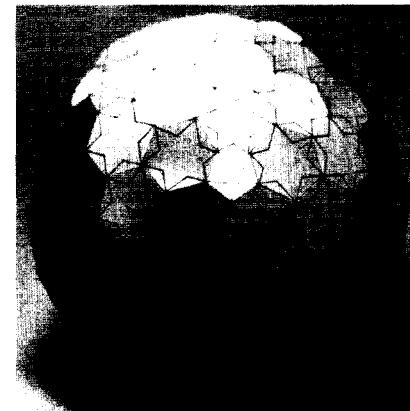
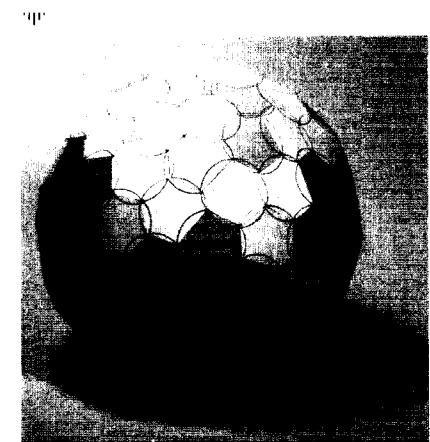


FIGURE 19

Covering the sphere with 132 equal circles according to Figure 11.



numerals, so the gluing can be done without confusion in the orientation of the parts. A model like this takes over 100 hours of work to complete, but when done in color it is breathtakingly beautiful.

CONCLUSIONS

1. The “skew” polyhedra in **Figure 6b** and **Figure 10b** have as many face types as the “straight” polyhedra in **Figure 4b** and **Figure 8b**, respectively, but the number of all faces of the “skew” polyhedra is greater than that of the “straight” ones, and the size of faces of the “skew” polyhedra is less than that of the “straight” ones. Thus, from these points of view, in the cases considered, the “skew” polyhedra are more advantageous than the “straight” polyhedra.
2. The $\{5+,3\}_{3,1}$ polyhedron in **Figures 10b and 18** seems to be similar to or perhaps the same as the polyhedron designed by Pavlov and set up as a statue in the town Gagarin some years ago.
3. In the case of covering the sphere with 122 equal circles in system $\{3,5+\}_{2,2}$, the graph has isolated points at the vertices of the icosahedron. (The circles are not fixed by the others.) From this fact it follows that, in system $\{5+,3\}_{2,2}$, the sphere has no inscribed trivalent polyhedron bounded by plane pentagons and hexagons of the same circumradius.
4. In all the four investigated cases, it can be ascertained that covering the sphere with n circles of different radii is more economical (thinner) than covering with n equal circles.
5. It is known [3] that a covering of the plane with circles of different radii cannot have a density less than the density of the thinnest covering of the plane with equal circles if, for any pair i,j , $C_i/C_j \leq 1.56$, where C_i and C_j denote the areas of the i th and j th types of circles in the covering system, respectively. However, it seems that in analogous theorems for spherical circle-coverings this bound has to be smaller, since in the case

Il est possible de réaliser le modèle de la **figure 17** en assemblant 10 pyramides triangulaires tronquées ouvertes sur l'intérieur pour une partie pentagrammique, et 12 pyramides comme celles-là pour une partie hexagrammique, en utilisant les données numériques de Pavlov [6], et en tenant compte des bissections de côté nécessaires ici. Ces parties sont tenues ensemble par des bandes hexagonales qui sont des pyramides hexagonales tronquées ouvertes sur les deux côtés. Les côtés obliques de toutes ces parties doivent être soigneusement identifiés par des numéros, de telle sorte que le collage puisse se faire sans confusion sur l'orientation des parties. La réalisation d'un modèle comme celui-ci demande plus de 100 heures de travail mais, lorsqu'il est réalisé en couleurs, il est beau à vous couper le souffle.

CONCLUSIONS

1. Les polyèdres «gauches» des **figures 6b et 10b** possèdent autant de types de faces que les polyèdres «droits» des **figures 4b et 8b**, respectivement, mais le nombre total des faces des polyèdres «gauches» est supérieur à celui des polyèdres «droits», et la dimension des faces des polyèdres «gauches» est inférieure à celle des polyèdres «droits». Ainsi, de ces points de vue, dans les cas considérés, les polyèdres «gauches» sont plus avantageux que les «droits».
2. Le polyèdre $\{5+,3\}_{3,1}$ présenté dans les **figures 10b et 18** semble être similaire ou même identique au polyèdre conçu par Pavlov et érigé en statue dans la municipalité de Gagarin voilà quelques années.
3. Dans le cas du recouvrement de la sphère par 122 cercles égaux dans le système $\{3,5+\}_{2,2}$, le graphe présente des points isolés aux sommets de l'icosaèdre. (Les cercles ne sont pas fixés par les autres.) Il s'ensuit que, dans le système $\{5+,3\}_{2,2}$, la sphère ne possède pas de polyèdre trivalent inscrit borné par des pentagones et des hexagones plans de même rayon de circonscription.

of a covering of the sphere with 32 circles of two different radii the quotient of surface areas of the different spherical caps is $C_1/C_2 = 1.40$ and the density is less than Fejes Tóth's lower bound for 32 equal circles.

6. Replacement of the spherical circles with plane circles – in all the cases investigated apart from the case of 122 equal circles – results in polyhedra inscribed into the sphere, whose models are suitable for illustrating the spherical circle-coverings; by inscribing of pentagrams and hexagrams in the pentagon and hexagon faces of these polyhedra we obtain new attractive patterns for geodesic domes.

ACKNOWLEDGEMENTS

The research done by the first author is sponsored by the Hungarian Academy of Sciences, research grant "TPB KKFA". We thank Dr. Zs. Gáspár for his assistance in the computation of the graph in **Figure 11a**.

.

4. Dans chacun des quatre cas étudiés, on peut vérifier que le recouvrement de la sphère par n cercles de différents rayons est plus économique (plus fin) qu'un recouvrement par n cercles égaux.
5. Il est connu [3] qu'un recouvrement du plan par des cercles de différents rayons ne peut pas présenter une densité inférieure à la densité du recouvrement le plus fin du plan par des cercles égaux si, pour toute paire i, j , $C_i/C_j \leq 1,56$, où C_i et C_j désignent les aires des i -ième et j -ième types de cercles dans le système de recouvrement, respectivement. Il semble toutefois que, dans des théorèmes analogues concernant les recouvrements de la sphère par des cercles, cette borne doit être plus petite puisque, dans le cas d'un recouvrement de la sphère par 32 cercles de deux différents rayons, le quotient des aires des surfaces des deux différentes calottes sphériques est $C_1/C_2 = 1,40$, et la densité est inférieure à la borne inférieure de Fejes Tóth pour 32 cercles égaux.
6. Le remplacement des cercles sphériques par des cercles plans – dans tous les cas étudiés sauf celui des 122 cercles égaux – résulte en des polyèdres inscrits dans la sphère, dont les modèles conviennent pour illustrer les recouvrements de la sphère par des cercles. En inscrivant des pentagrammes et des hexagrammes dans les faces pentagonales et hexagonales de ces polyèdres, on obtient de nouveaux modèles intéressants pour des dômes géodésiques.

REMERCIEMENTS

L'Académie hongroise des sciences a subventionné la recherche du premier auteur, subvention «TPB KKFA». Nous tenons à remercier le docteur Zs. Gáspár pour l'aide qu'il a apporté lors du calcul du graphe de la **figure 11a**.

.

BIBLIOGRAPHY BIBLIOGRAPHIE

- [1] D.L.D. Caspar and A. Klug
"Physical principles in the construction of regular viruses."
 Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology, 27 (1962), 1-24.
 • *Skew, triangle tessellations on the icosahedron and their application in virus morphology.*
 • *Tessellations triangulaires gauches sur l'icosaèdre et leur application en morphologie des virus.*
- [2] H.S.M. Coxeter
Virus Macromolecules and Geodesic Domes.
 A Spectrum of Mathematics (ed. J.C. Butcher), Auckland University Press and Oxford University Press, 1972, pp. 98-107.
 • *Spherical triangle polyhedra with icosaedral symmetry, topology of icosaedral virus coats.*
 • *Polyèdre triangle sphérique de symétrie icosaédrique, topologie de l'enveloppe icosaédrique des virus.*
- [3] L. Fejes Tóth
Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum.
 Zweite Auflage. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
 • *Spherical circle-covering on pp.113, 171, 209; covering with non-equal circles on p.194.*
 • *Recouvrement de la sphère par des cercles aux pp.113, 171, 209; recouvrement par des cercles non égaux à la p.194.*
- [4] L. Fejes Tóth
"Stable packing of circles on the sphere."
 Structural Topology, 11 (1985), 9-14.
 • *Stable circle-packings, tilings and Dirichlet cells on the sphere.*
 • *Juxtapositions stables de cercles, pavages et cellules de Dirichlet sur la sphère.*
- [5] M. Goldberg
"A class of multi-symmetric polyhedra."
 The Tôhoku Mathematical Journal, 43 (1937), 104-108.
 • *Skew, trivalent tessellations on the icosahedron.*
 • *Tessellations trivalentes gauches sur l'icosaèdre.*
- [6] G. Pavlov
"Compositional form-shaping of crystal domes and shells."
 [In Russian], Arkhitektura SSSR, 1977 № 2, 30-41.
 • *Different methods for subdivision of the spherical surface into triangles and their application in geodesic domes.*
 • *Différentes méthodes de subdivision en triangles de la surface sphérique et leurs applications dans les dômes géodésiques.*
- [7] L. Spunt
"Modular dome structure."
 IASS World Congress on space enclosures. Build. Res. Centre Concordia Univ. Montreal, 1976, Vol. 1, 235-240.
 • *Packing of equal circles on a sphere and its application in domes.*
 • *Juxtaposition de cercles égaux sur la sphère et son application dans les dômes.*
- [8] Tibor Tarnai
"Spherical circle-packing in nature, practice and theory."
 Structural Topology, 9 (1984), 39-58.
 • *Review on spherical circle-packings.*
 • *Un compte rendu sur les juxtapositions de cercles sur la sphère.*
- [9] T. Tarnai and Zs. Gáspár
Covering the sphere with equal circles.
 Colloquium on Intuitive Geometry, Balatonzéplak, Hungary, May 1985. Abstracts, p. 50.
 • *Spherical circle-covering constructions for 11 and 13 circles, rigidity of the graph.*
 • *Constructions du recouvrement de la sphère par 11 et 13 cercles, rigidité du graphe.*
- [10] T. Tarnai and Zs. Gáspár
Covering the Sphere with Equal Circles and Rigidity of its Graph.
 (In preparation)
 • *Spherical circle-coverings, engineering method in construction of covering, rigidity of the graph of coverings.*
 • *Recouvrements de la sphère par des cercles, méthode d'ingénierie dans la construction du recouvrement, rigidité du graphe des recouvrements.*
- [11] T. Tarnai and Zs. Gáspár
"Covering the sphere with 11 equal circles."
 Elemente der Mathematik, 41 (1986), 35-38.
 • *A new construction for covering of the sphere with 11 equal circles.*
 • *Une nouvelle construction du recouvrement de la sphère par 11 cercles égaux.*
- [12] Magnus J. Wenninger
Spherical Models.
 Cambridge University Press, 1979.
 • *Models of spherical polyhedra and geodesic domes.*
 • *Modèles de polyèdres sphériques et dômes géodésiques.*

